**1.3 正方形的性质与判定（重难点）**

**考点1 正方形性质的理解**

**【例1】**（2023·湖南岳阳·统考一模）下是关于某个四边形的三个结论：①它的对角线相等；②它是一个正方形；③它是一个矩形．下列推理过程正确的是（    ）

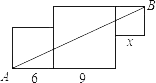
A．由②推出③，由③推出① B．由①推出②，由②推出③

C．由③推出①，由①推出② D．由①推出③，由③推出②

**【变式1-1】**（2023春·广东汕头·八年级汕头市翠英中学校考期中）以下说法不正确的是（    ）

A．平行四边形是轴对称图形 B．矩形对角线相等

C．正方形对角线互相垂直平分 D．菱形四条边相等

**【变式1-2】**（2023春·八年级单元测试）如图是由三个边长分别为6、9、*x*的正方形所组成的图形，若直线*AB*将它分成面积相等的两部分，则*x*的值是（　　）

A．1或9 B．3或5 C．4或6 D．3或6

**【变式1-3】**（2023春·安徽蚌埠·八年级校联考阶段练习）下列说法：

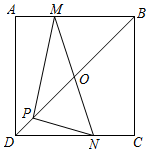
四边相等的四边形一定是菱形顺次连接矩形各边中点形成的四边形一定是正方形

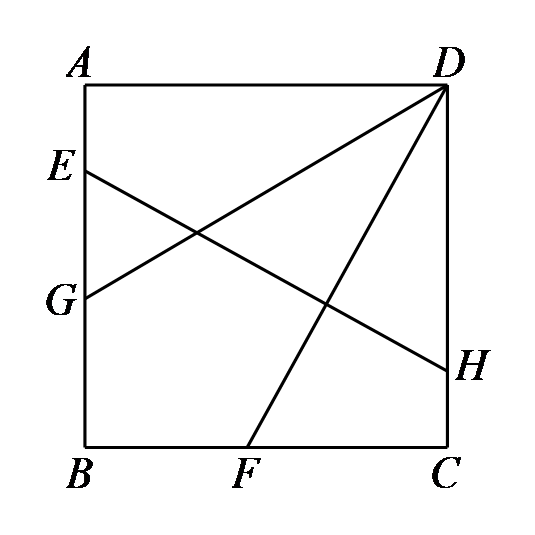
对角线相等的四边形一定是矩形经过平行四边形对角线交点的直线，一定能把平行四边形分成面积相等的两部分，其中正确的有　　个．

A．4 B．3 C．2 D．1

**【变式1-4】**（2023春·河北廊坊·八年级廊坊市第四中学校考期中）正方形具有而菱形不一定具有的性质是(　　)A．四边相等 B．对角线相等C．对角相等 D．对角线互相垂直

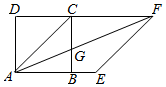
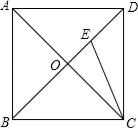
**考点2 利用正方形的性质求值（角度、线段长、面积）**

**【例】**（2023春·八年级单元测试）如图，把含30°的直角三角板*PMN*放置在正方形*ABCD*中，，直角顶点*P*在正方形*ABCD*的对角线*BD*上，点*M*，*N*分别在*AB*和*CD*边上，*MN*与*BD*交于点*O*，且点*O*为*MN*的中点，则的度数为（    ）A．60° B．65° C．75° D．80°

**【变式1】**（2023春·全国·八年级专题练习）如图，*E*、*F*、*H*分别为正方形的边、、上的点，连接，，且，平分交于点*G*．若，则的度数为（    ）

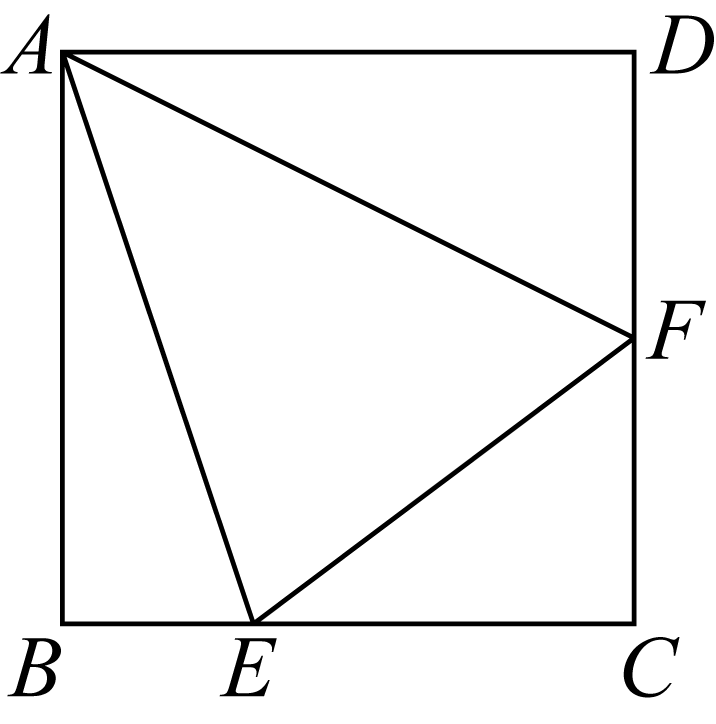
A．26° B．38° C．52° D．64°

**【变式2】**（2023春·江苏·八年级期中）如图，以正方形*ABCD*的对角线*AC*为一边作菱形*AEFC*，点*F*在*DC*的延长线上，连接*AF*交*BC*于点*G*，则∠*FGC*的度数为（　　）

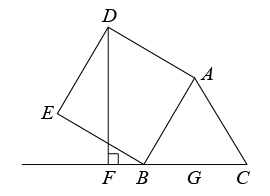


A．67.5° B．45° C．60° D．75°

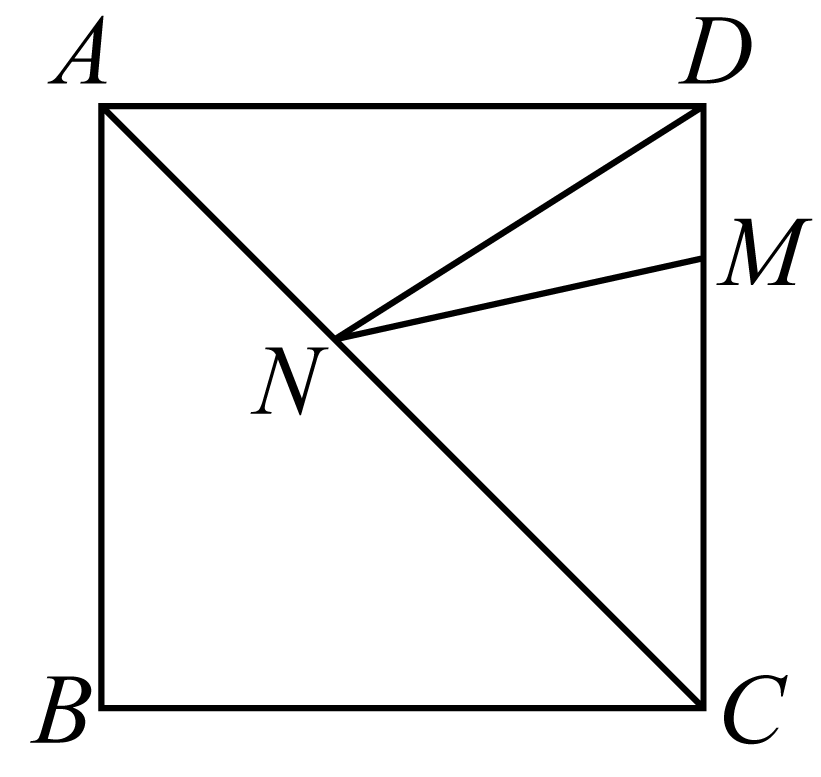
**【变式3】**（2023秋·辽宁鞍山·九年级统考期末）如图，正方形*ABCD*的两条对角线*AC*，*BD*相交于点*O*，点*E*在*BD*上，且*BE*＝*CD*，则∠*BEC*的度数为（　　）

A．22.5° B．60° C．67.5° D．75°

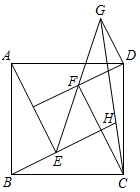
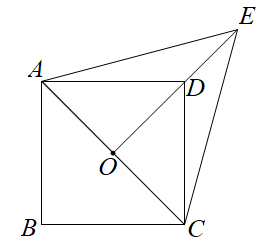
**【变式4】**（2023·重庆·统考中考真题）如图，在正方形中，点，分别在，上，连接，，，．若，则一定等于（ ）A． B． C． D．

**【例】**（2023春·山东济宁·八年级统考期中）如图，在边长为2的等边三角形的外侧作正方形，过点作，垂足为，则的长为（    ）A． B． C． D．

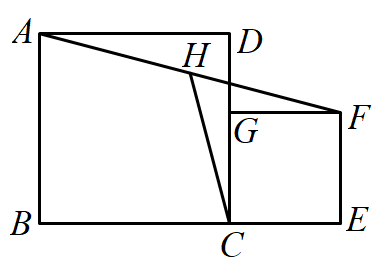
**【变式1】**（2023春·山东德州·八年级统考期中）如图，正方形的边长为8，点*M*在上，且，*N*是上一动点，则的最小值为（    ）．



A．8 B． C． D．10

**【变式2】**（2023春·八年级单元测试）由四个全等的直角三角形和一个小正方形组成的大正方形如图所示．过点作的垂线交小正方形对角线的延长线于点，连结，延长交于点．若，则的值为（    ）A． B． C． D．

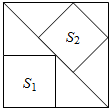
**【变式3】**（2023春·辽宁沈阳·八年级沈阳市第一二六中学校联考阶段练习）如图，*O*为正方形对角线的中点，为等边三角形．若，则的长度为（    ）A． B． C． D．

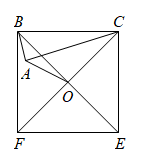
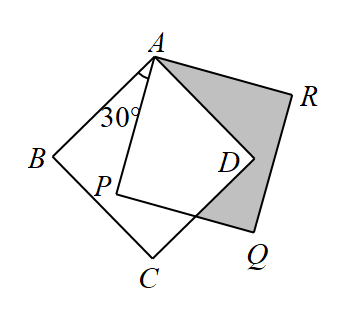
**【变式4】**（2023春·福建龙岩·八年级统考期中）如图，在正方形和正方形中，点*G*在上，，，*H*是的中点，那么的长为（    ）A． B． C． D．

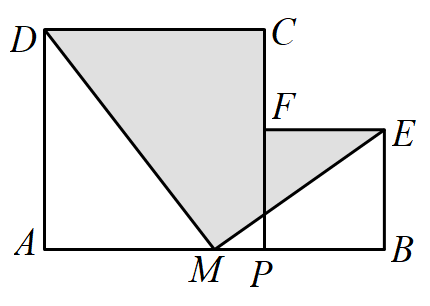
**【例】**（2023春·安徽合肥·八年级合肥市庐阳中学校考期中）如图，边长为6的大正方形中有两个小正方形，若两个小正方形的面积分别为*S1*，*S2*，则*S1*+*S2*的值为（　　）A．16 B．17C．18 D．19

**【变式1】**（2023春·全国·八年级期中）如图以直角三角形的斜边为边在三角形的同侧作正方形．设正方形的中心为*O*，连接*AO*，如果，．则正方形的面积为（    ）

A．18 B．32 C．34 D．50

**【变式2】**（2023·河北沧州·校考二模）如图，将两个全等的正方形与重叠放置，若，，则图中阴影部分的面积是（  ）A． B． C． D．

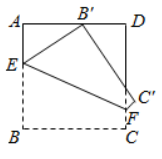




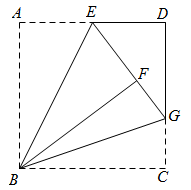
**【变式3】**（2023春·安徽合肥·七年级合肥市第四十八中学校考期中）如图，点*M*是线段的中点，点*P*在上．分别以、为边，在同侧作正方形和正方形，连接和．设、，且，，则图中阴影部分的面积为（    ）

A．24 B．20 C．18 D．16

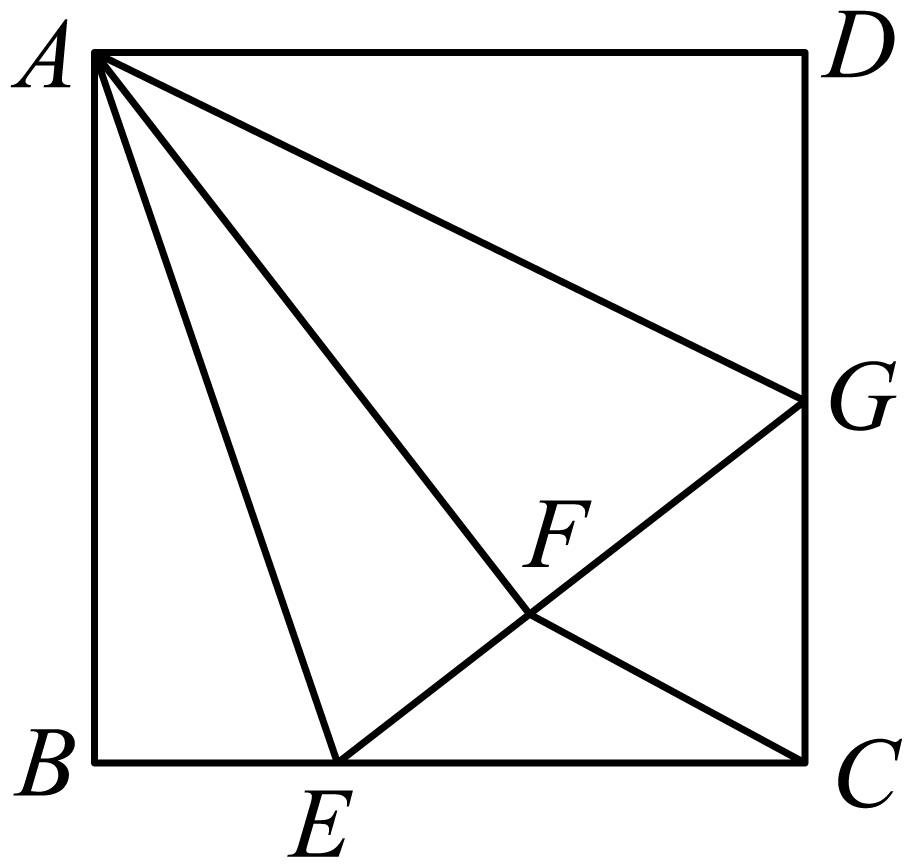
**考点3 正方形折叠问题**

**【例3】**（2023春·湖南湘潭·八年级统考期末）如图，在正方形中，，点，分别在边，上，．若将四边形沿折叠，点恰好落在边上点处，则的长度为（    ）

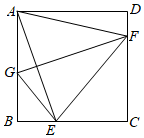
A．1 B． C． D．2

**【变式3-1】**（2023春·福建厦门·八年级厦门市莲花中学校考期中）如图，将正方形*ABCD*分别沿*BE*，*BG*折叠，使边*AB*，*BC*在*BF*处重合，折痕为*BE*，*BG*．若正方形*ABCD*的边长为6，*E*是*AD*边的中点，则*CG*的长是（    ）

A．3 B．2.5 C．2 D．1

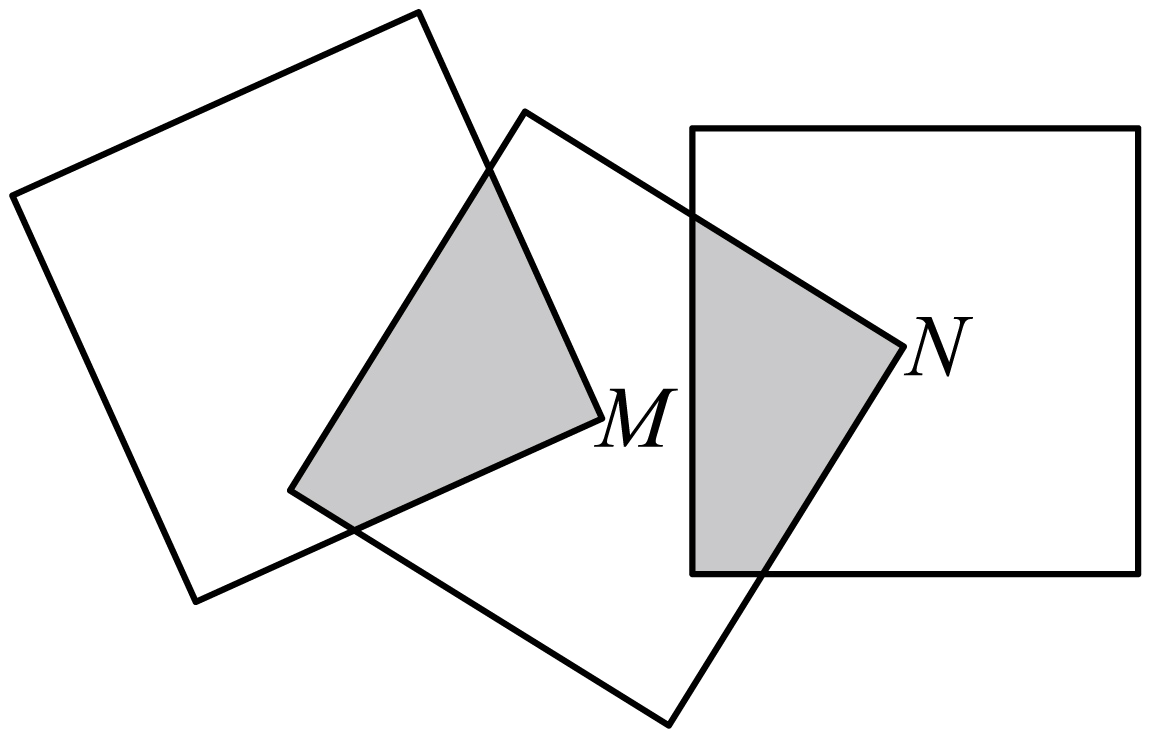
**【变式3-2】**（2023春·全国·八年级专题练习）如图，在正方形中，是边上的一点，，，将正方形边沿折叠到，延长交于，连接现在有如下四个结论：；；③；其中结论正确的个数是（    ）

A． B． C． D．

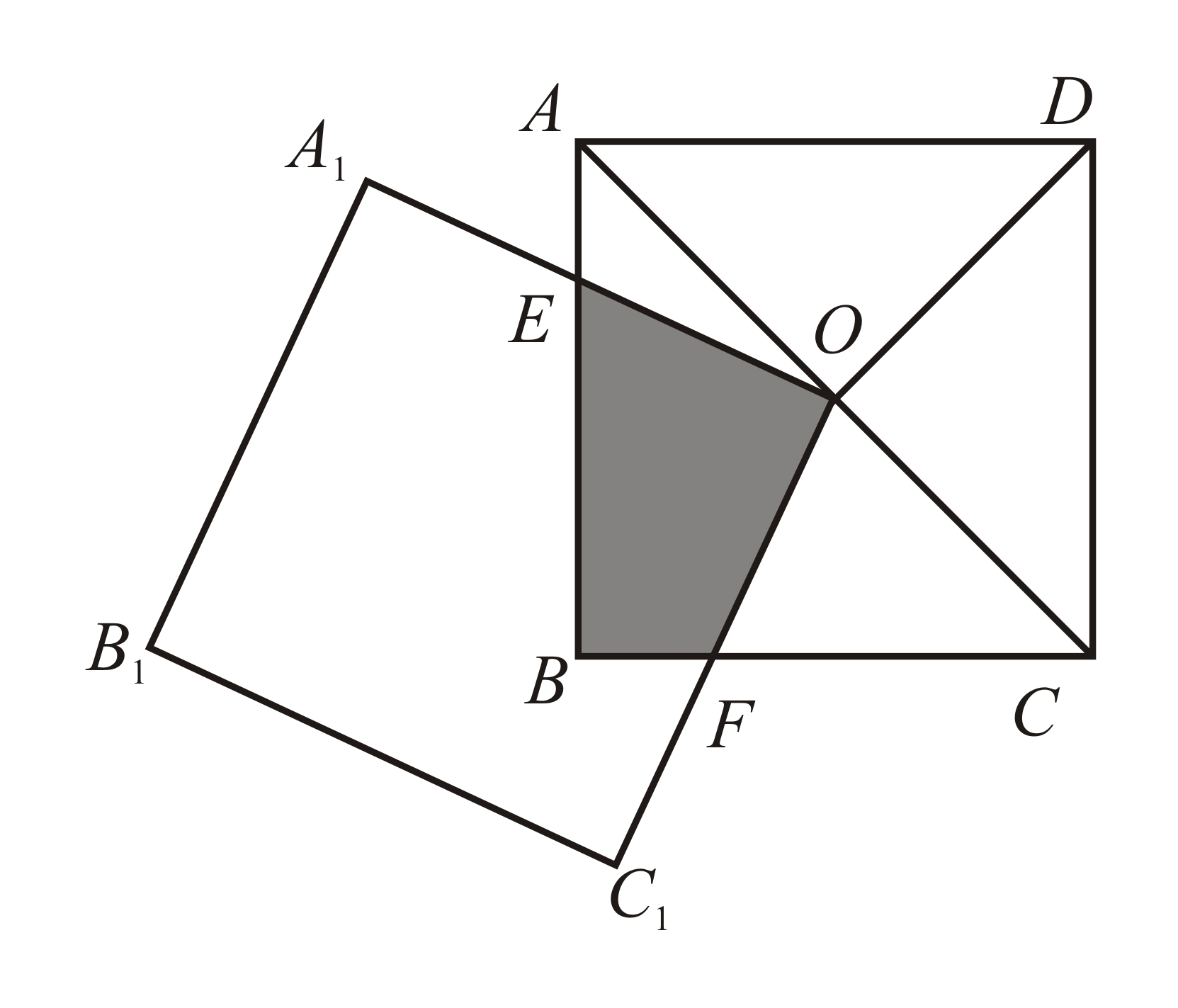
**【变式3-3】**（2023春·浙江·八年级专题练习）如图，正方形*ABCD*的边长为3，*E*为*BC*边上一点，*BE*＝1.将正方形沿*GF*折叠，使点*A*恰好与点*E*重合，连接*AF*，*EF*，*GE*，则四边形*AGEF*的面积为（    ）A．2 B．2 C．6 D．5

**考点4 求正方形折叠部分的面积**

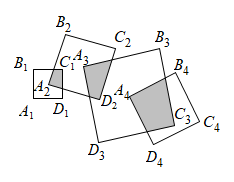
**【变式4-2】**（2023春·全国·八年级专题练习）如图，三个边长均为 2 的正方形重叠在一起，M、N 是其中两个正方形对角线的交点，则两个阴影部分面积之和是（    ）



A．1 B．2 C． D．4

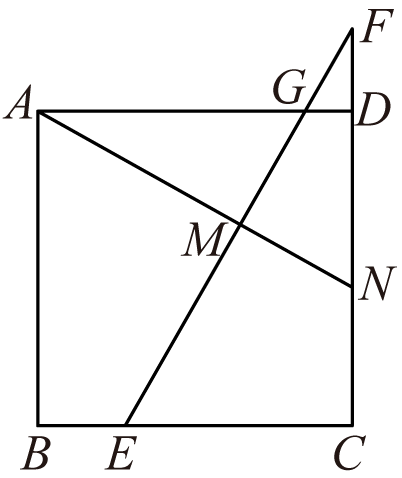
**【变式4-3】**（2023春·全国·八年级专题练习）如图，正方形ABCD的对角线相交于点O，点O又是正方形A1B1C1O的一个顶点，且这两个正方形的边长都为2．若正方形A1B1C1O绕点O转动，则两个正方形重叠部分的面积为（　　）

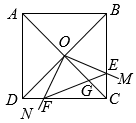
A．16 B．4 C．1 D．2

**【变式4-4】**（2023春·八年级单元测试）如图，正方形、、、的边长分别为2、4、6、4，四个正方形按照如图所示的方式摆放，点、、分别位于正方形、、、对角线的交点，则阴影部分的面积和为（　　）

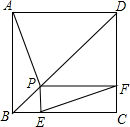
A．12 B．13 C．14 D．18

**考点5 根据正方形的性质证明**

**【例5】**（2023·山东临沂·统考模拟预测）如图，在正方形*ABCD*中，点*E*是边*BC*上的一点，点*F*在边*CD*的延长线上，且，连接*EF*交边*AD*于点*G*．过点*A*作，垂足为点*M*，交边*CD*于点*N*．若，，则线段*AN*的长为

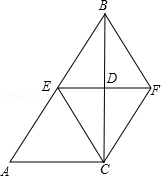
**【变式5-3】**（2023春·浙江·八年级专题练习）如图在正方形*ABCD*中，点*O*是对角线*AC*，*BD*交点，过点*O*作射线*OM*，*ON*分别交*BC*，*CD*于点*E*，*F*，且∠*EOF*＝90°，*OC*，*EF*交于点*G*．有下列结论：①；②*CF*＝*BE*；③四边形*CEOF*的面积为正方形*ABCD*面积的；④．其中正确的是（    ）

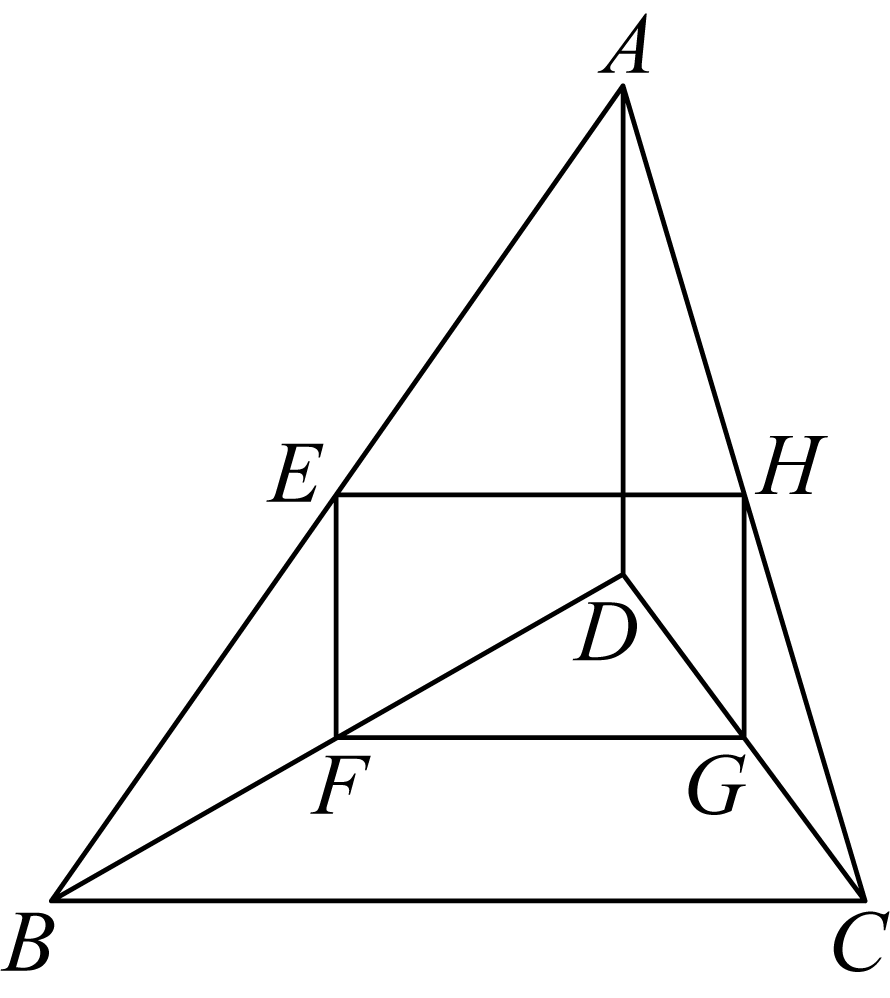
A．③④ B．①②③ C．①②④ D．①②③④

**【变式5-4】**（2023·湖南娄底·校考一模）如图，点*P*是正方形*ABCD*的对角线*BD*上一个动点，*PE*⊥*BC*于点*E*，*PF*⊥*CD*于点*F*，连接*EF*，有下列5个结论：①*AP*＝*EF*；②*AP*⊥*EF*；③△*APD*一定是等腰三角形；④∠*PFE*＝∠*BAP*；⑤*EF*的最小值等于．其中正确结论的个数是（ ）A．2个 B．3个 C．4个 D．5个

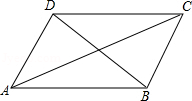
**考点6 添加条件使四边形是正方形**

**【例6】**（2023春·上海·八年级专题练习）在四边形*ABCD*中，．如果再添加一个条件可证明四边形是正方形，那么这个条件可以是（    ）A． B． C． D．

**【变式6-1】**（2023春·八年级单元测试）如图，在△*ABC*中，∠*ACB*=90°，*BC*的垂直平分线*EF*交*BC*于点*D*，交*AB*于点*E*，且*BE*=*BF*，添加一个条件，仍不能证明四边形*BECF*为正方形的是(  )A．*BC*=*AC* B．*CF*⊥*BF* C．*BD*=*DF* D．*AC*=*BF*

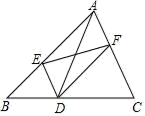
**【变式6-2】**（2023·陕西西安·西安市铁一中学校考模拟预测）如图，*D*是内一点，，*E*、*F*、*G*、*H*分别是的中点，添加下列那个条件，能使得四边形成为正方形（）

  A． B． C． D．

**【变式6-4】**（2023春·江苏常州）小明在学习了正方形之后，给同桌小文出了道题，从下列四个条件：①*AB*=*BC*，②∠*ABC*=90°，③*AC*=*BD*，④*AC*⊥*BD*中选两个作为补充条件，使▱*ABCD*为正方形（如图），现有下列四种选法，你认为其中错误的是（ ）A．①② B．②③ C．①③ D．②④

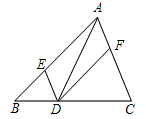
**考点7 证明四边形是正方形**

**【例7】**（2023春·八年级单元测试）如图，在中，点*E*、*D*、*F*分别在边上，且，，下列四个判断中，不正确的是（    ）

A．四边形是平行四边形B．如果平分，那么四边形是菱形

C．如果，那么四边形是矩形

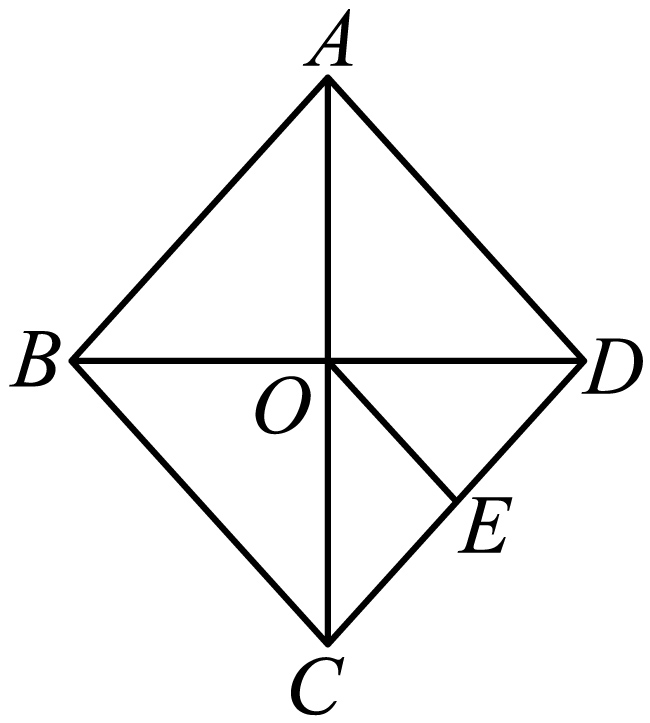
D．如果且，那么四边形是正方形

**【变式7-1】**（2023春·浙江·八年级专题练习）如图，在中，点*D*，*E*，*F*分别在边上，且，．下列四种说法：

①四边形是平行四边形；②如果，那么四边形是矩形；

③如果平分，那么四边形是菱形；

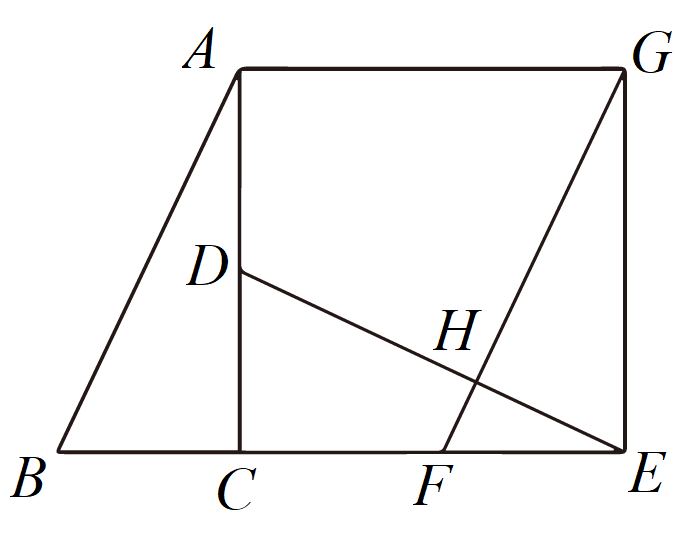
④如果，且，那么四边形是正方形．

其中，正确的有（ ）A．1个 B．2个 C．3个 D．4个

**【变式7-2】**（2023春·全国·八年级专题练习）如图，在菱形*ABCD*中，对角线*AC*，*BD*相交于点*O*，点*E*是*CD*中点，连接*OE*，则下列结论中不一定正确的是（    ）

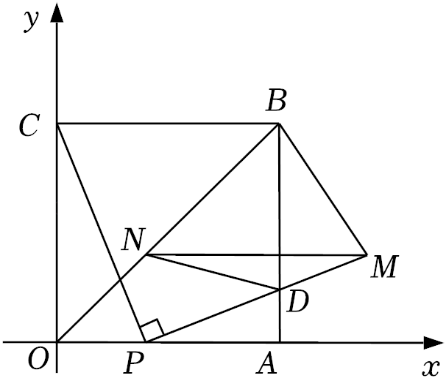
A．*AB*＝*AD* B．*OE*＝*AB* C．∠*DOE*＝∠*EOC* D．∠*EOD*＝∠*EDO*

**【变式7-3】**（2023春·湖南邵阳·八年级校联考期中）如图，已知Rt△*ABC*中，∠*ACB*＝90°，先把△*ABC*绕点*C*顺时针旋转90°至△*EDC*后，再把△*ABC*沿射线*BC*平移至△*GFE*，*DE*、*FG*相交于点*H*．

  (1)判断线段*DE*、*FG*的位置关系，并说明理由；

(2)连接*AG*，求证：四边形*ACEG*是正方形．

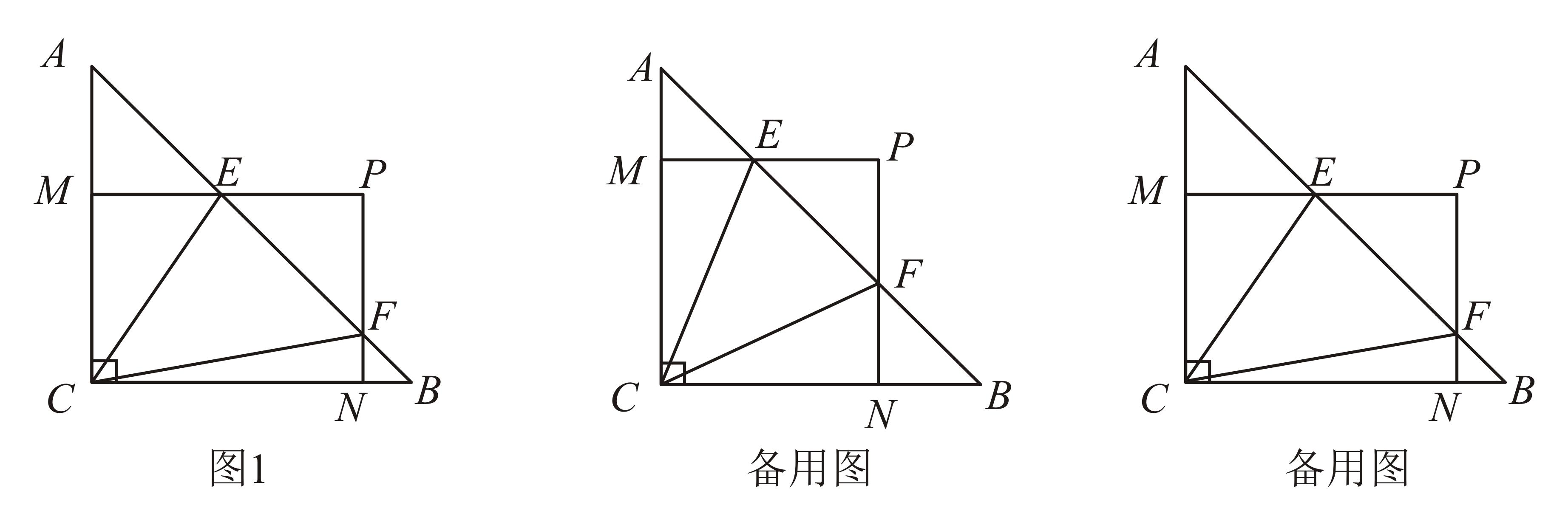
**考点8 利用正方形的性质与判定求值（角度、线段长、面积）**

**【例8】**（2023春·全国·八年级专题练习）如图，四边形*OABC*是边长为4的正方形，点*P*为*OA*边上任意一点（与点*O*、*A*不重合），连结*CP*，过点*P*作*PM*⊥*CP*交*AB*于点*D*，且*PM*＝*CP*，过点*M*作*MN**OA*，交*BO*于点*N*，连结*ND*、*BM*，设*OP*＝*t*．

(1)求点*M*的坐标（用含*t*的代数式表示）；(2)求直线*OB*的解析式；

(3)求线段*MN*的长度．

**【变式8-1】**（2023·上海·模拟预测）如图1，△*ABC*是等腰直角三角形，*AC*=*BC*=4，∠*C*=90°，*M*，*N*分别是边*AC*，*BC*上的点，以*CM*，*CN*为邻边作矩形*PMCN*，交*AB*于*E*，*F*．设*CM*=*a*，*CN*=*b*，若*ab*=8．

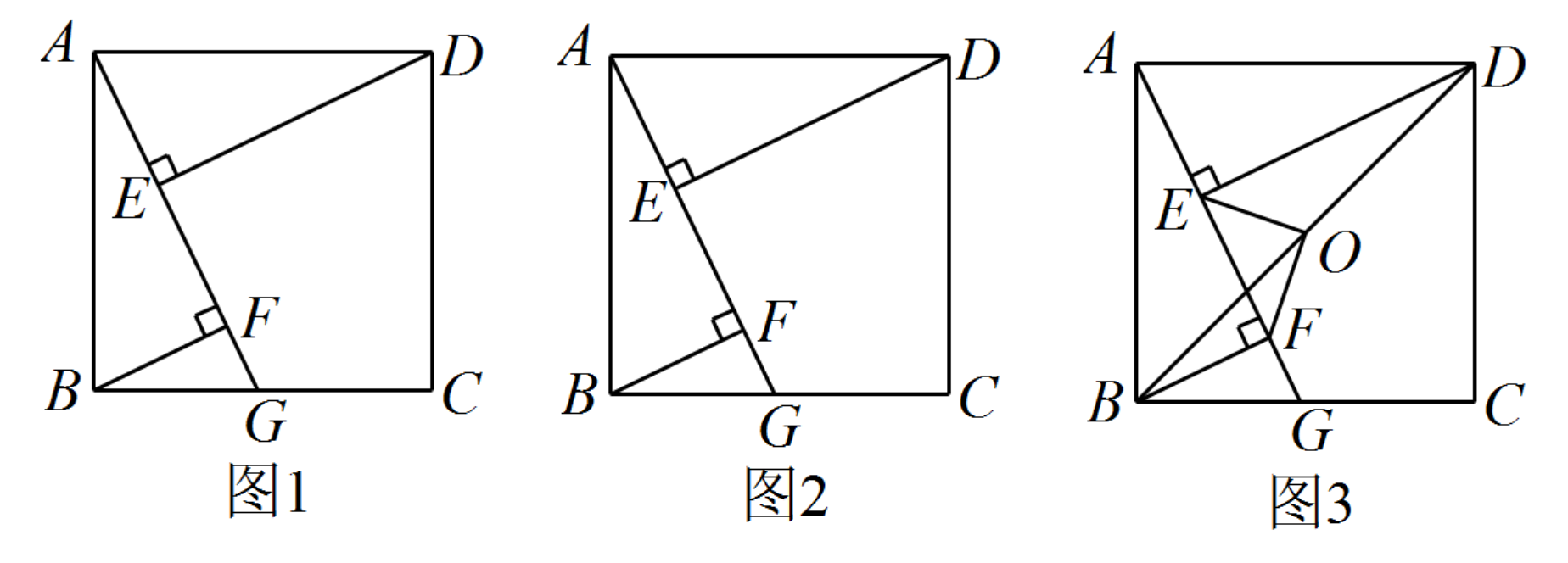


(1)判断由线段*AE*，*EF*，*BF*组成的三角形的形状，并说明理由；

(2)①当*a*=*b*时，求∠*ECF*的度数；

②当*a*≠*b*时，①中的结论是否成立？并说明理由．

**【变式8-3】**（2023春·全国·八年级专题练习）如图1，四边形是边长为10的正方形，是线段上的任意一点，于点，于点．



(1)求证：；

(2)如图2，当点是的中点时，求线段的长度；

(3)如图3，在（2）的条件下，连接并取的中点，连接、，求的面积．

**【变式8-4】**（2023·湖北十堰·校考一模）△*ABC*中，∠*BAC*=90°，*AB*=*AC*，点*D*为直线*BC*上一动点（点*D*不与*B*，*C*重合），以*AD*为边在*AD*右侧作正方形*ADEF*，连接*CF*，

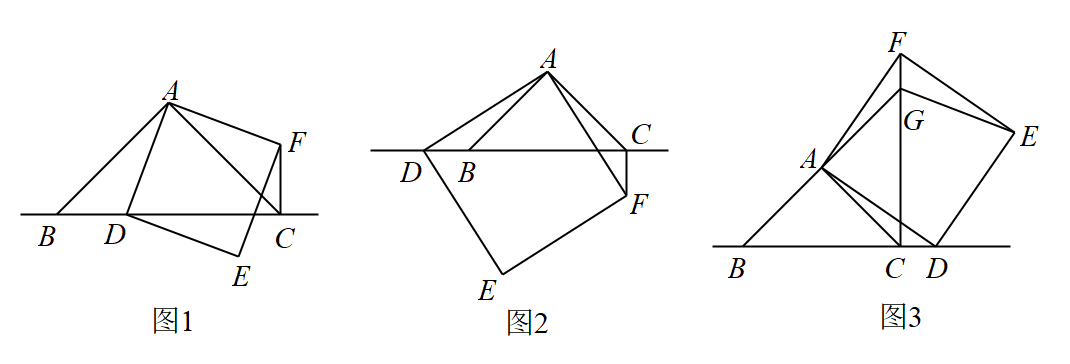
（1）观察猜想：如图1，当点*D*在线段*BC*上时，①*BC*与*CF*的位置关系为：　 　．

②*BC*，*CD*，*CF*之间的数量关系为：　 　；（将结论直接写在横线上）

（2）数学思考：

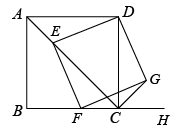
如图2，当点*D*在线段*CB*的延长线上时，结论①，②是否仍然成立？若成立，请给予证明；若不成立，请你写出正确结论再给予证明．

（3）拓展延伸：如图3，当点*D*在线段*BC*的延长线上时，延长*BA*交*CF*于点*G*，连接*GE*，若已知*AB*=2，*CD*=*BC*，请求出*GE*的长．



**考点9 利用正方形的性质与判定证明**

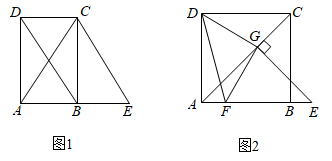
**【例9】**（2023春·湖北咸宁·八年级统考期末）如图，已知四边形是正方形，，点*E*为对角线上一动点，连接．过点*E*作，交射线点*F*，以为邻边作矩形．连接．

(1)连接，求证：．

(2)求证：矩形是正方形．

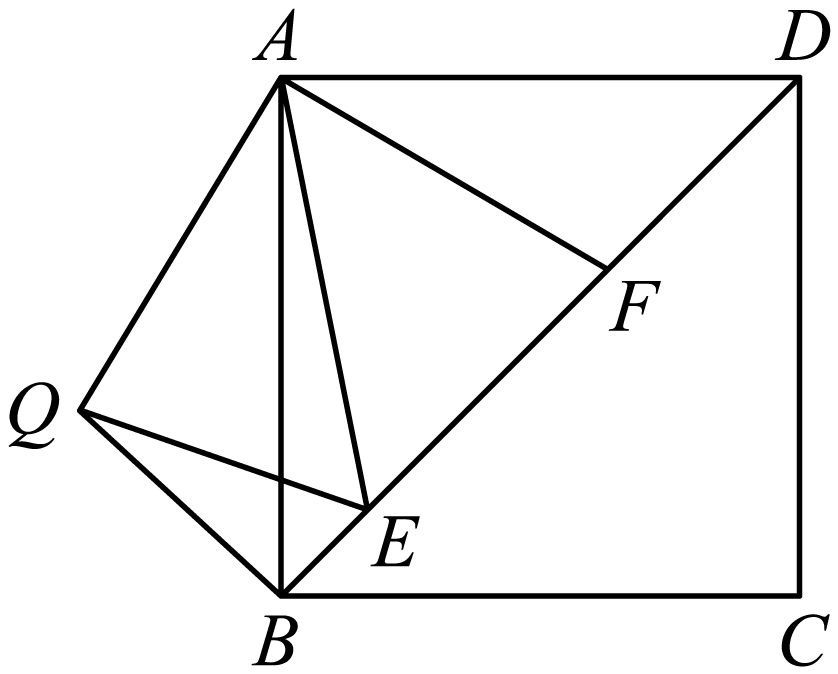
(3)探究：的值是否为定值？若是，请求出这个定值，若不是，请说明理由．

**【变式9-1】**（2023·全国·九年级假期作业）四边形为矩形，*E*是延长线上的一点．



（1）若，如图1，求证：四边形为平行四边形；

（2）若，点*F*是上的点，，于点*G*，如图2，求证：是等腰直角三角形．

**【变式9-2】**（2023·全国·九年级专题练习）如图，在正方形中，*E*、*F*是对角线上两点，且，将绕点*A*顺时针旋转后，得到，连接．

(1)求证：；

(2)求证：；

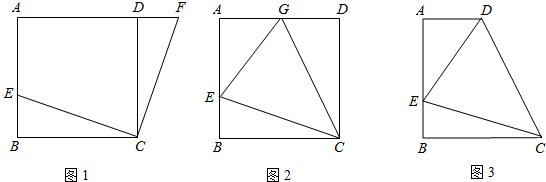
(3)当*F*是的中点时，判断四边形的形状，并说明理由．

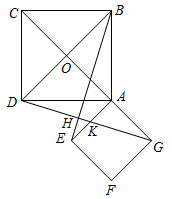
**【变式9-3】**（2023春·全国·八年级期末）（1）如图1，在正方形ABCD中，E是AB上一点，F是AD延长线上一点，且DF＝BE，求证：CE＝CF；

（2）如图2，在正方形ABCD中，E是AB上一点，G是AD上一点，如果∠GCE＝45°，请你利用（1）的结论证明：GE＝BE＋GD；

（3）运用（1）（2）解答中所积累的经验和知识，完成下题：

如图3，在直角梯形ABCD中，AD∥BC（BC＞AD），∠B＝90°，AB＝BC，E是AB上一点，且∠DCE＝45°，BE＝4，DE=10, 求直角梯形ABCD的面积．

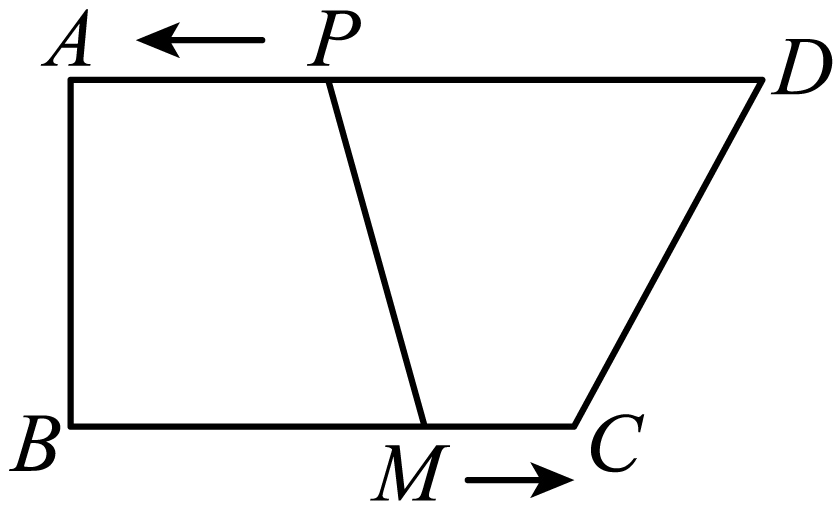


**【变式9-4】**（2023春·福建南平·八年级统考阶段练习）如图，点是正方形对角线的延长线上任意一点，以线段为边作一个正方形，线段与、分别相交于点、．(1)求证：；

(2)判断与的关系，并说明理由；

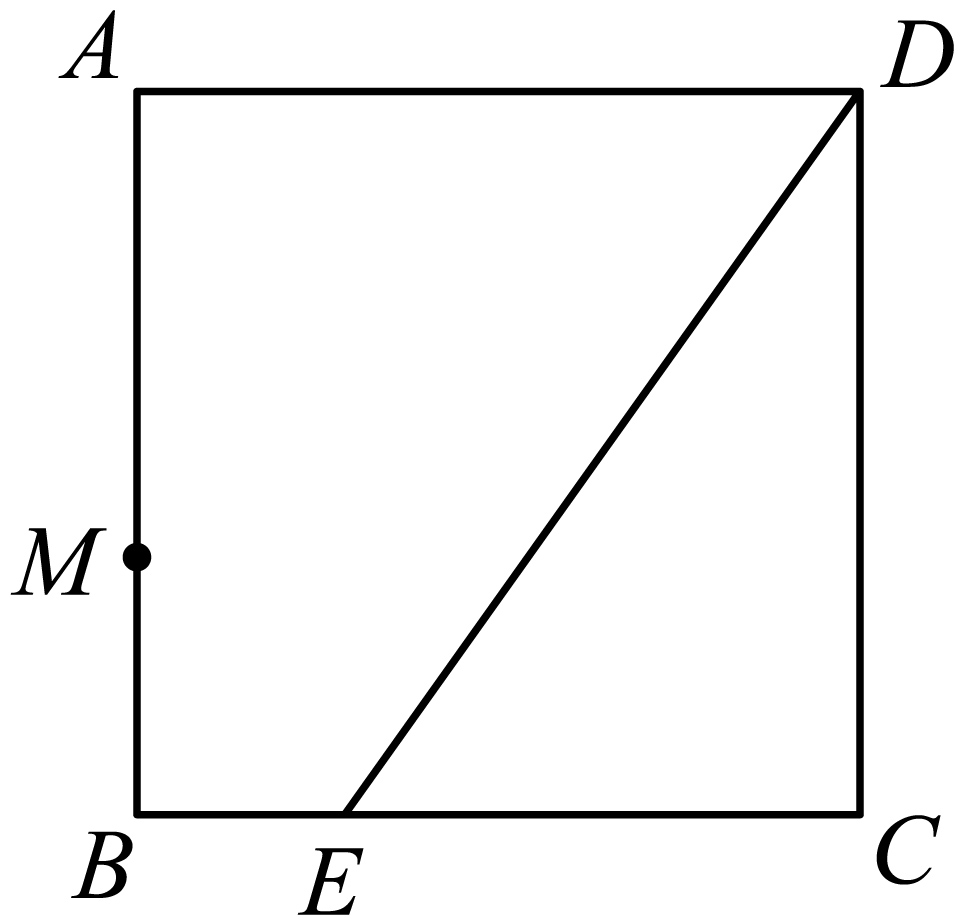
(3)若，，求的长．

**考点10 （特殊）平行四边形的动点问题**

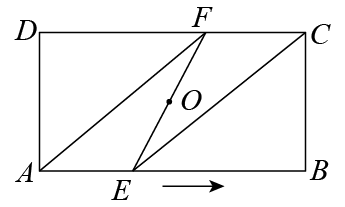
**【例10】**（2023·河北石家庄·统考二模）如图，在四边形中，，，，点从点出发，以的速度向点运动，点从点同时出发，以相同的速度向点运动，当其中一个动点到达端点时，两个动点同时停止运动.设点的运动时间为（单位：），下列结论正确的是（    ）

A．当时，四边形为矩形 B．当时，四边形为平行四边形

C．当时， D．当时，或

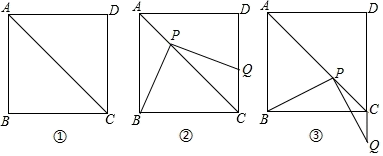
**【变式10-1】**（2023春·浙江·八年级专题练习）如图，在正方形*ABCD*中，*AB*=4，*E*是*BC*上的一点且*CE*=3，连接*DE*，动点*M*从点*A*以每秒2个单位长度的速度沿*AB*-*BC*-*CD*-*DA*向终点*A*运动，设点*M*的运动时间为*t*秒，当△*ABM*和△*DCE*全等时，*t*的值是（   ）

A．3.5 B．5.5 C．6.5 D．3.5或6.5

**【变式10-2】**（2023春·浙江·八年级专题练习）如图，点为矩形()的对称中心，点从点出发沿向点*B*运动，移动到点*B*停止，延长交于点，则四边形*AECF*形状是下列图形中的哪些：①平行四边形，②菱形，③矩形，④正方形．（    ）

A．①②③ B．①②④ C．①③④ D．①②③④

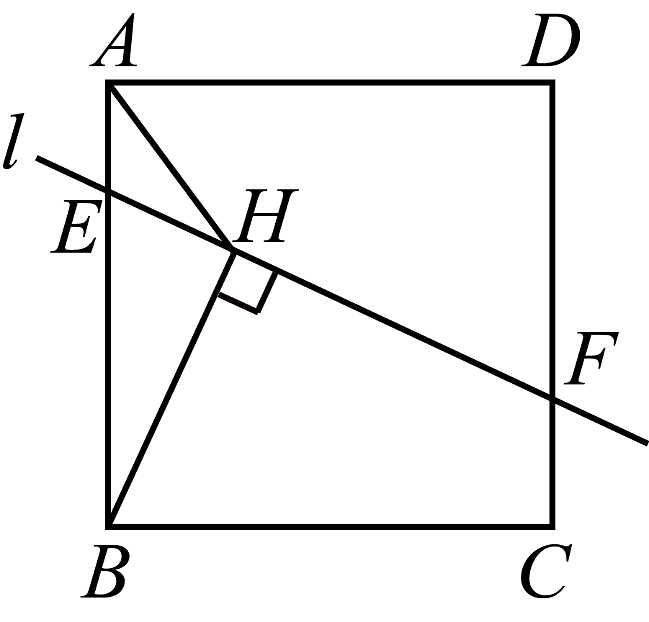
**【变式10-3】**（2023春·江苏·八年级专题练习）操作：将一把三角尺放在如图①的正方形中，使它的直角顶点在对角线上滑动，直角的一边始终经过点，另一边与射线相交于点，探究：



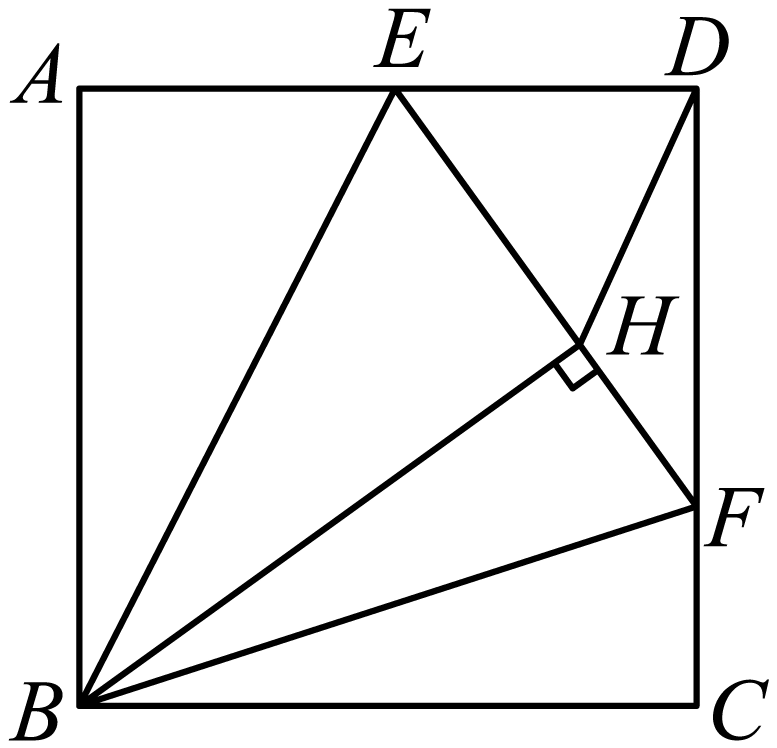
(1)如图②，当点在上时，求证：.

(2)如图③，当点在延长线上时，①中的结论还成立吗？简要说明理由.

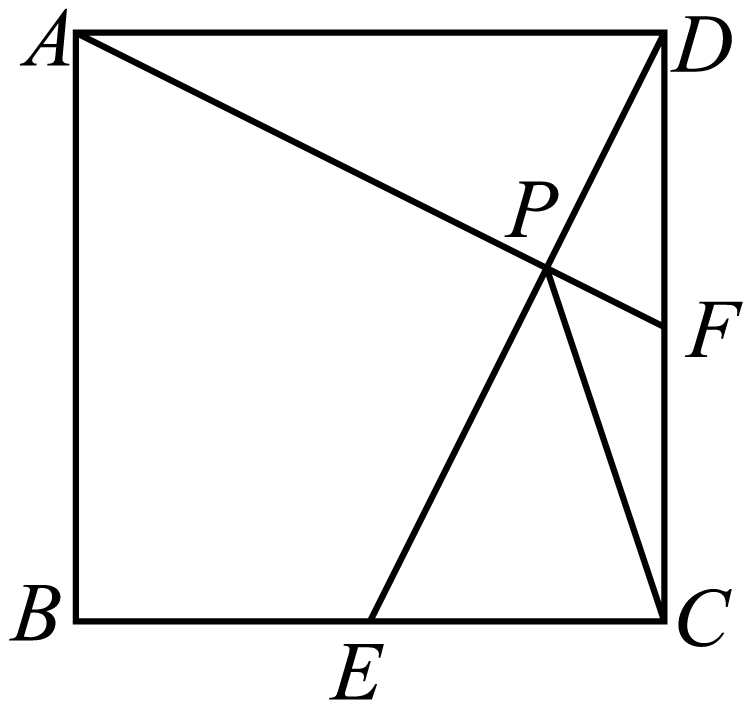
**考点11 利用（特殊）平行四边形求最值**

**【例11】**（2023·陕西榆林·校考模拟预测）如图，直线平分正方形的面积，直线分别与、交于点、，直线于，连接，若，则长的最小值为 ．

**【变式11-1】**（2023·陕西西安·校考模拟预测）如图，在边长为4的正方形中，点*E*、*F*分别为边上的动点（不与端点重合），连接，点*E*、*F*在运动过程中，始终保持，连接．过点*B*作，垂足为*H*，连接，则的最小值为 ．



**【变式11-4】**（2023春·湖北武汉·八年级校联考阶段练习）如图，正方形中，点为边的上一动点，作交、分别于、点，连．



(1)若点*E*为的中点，求证：*F*点为的中点；

(2)若点*E*为的中点，，，求的长；

(3)若正方形边长为4，直接写出的最小值\_\_\_\_\_\_\_\_．